DETERMINANTES Y MATRICES

Ejercicio N° 1:

Verificar la siguiente identidad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$$

Solución del ejercicio N° 1

Haciendo : $F_2 - F_1 * x \to F_2$ además $F_3 - F_1 * yz \to F_3$ queda :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x \\ 0 & xz-yz & xy-yz \end{vmatrix}$$ desarrollando por la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x \\ 0 & xz-yz & xy-yz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ xz-yz & xy-yz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ z(x-y) & y(x-z) \end{vmatrix}$$

Sacando factor común (-1) en cada uno de los elementos de la primera fila queda:

$$= \begin{vmatrix} (-1)(x-y) & (-1)(x-z) \\ z(x-y) & y(x-z) \end{vmatrix}$$

sacando factor común $(x-y)$ en cada uno de los elementos de la primera columna y $(x-z)$ en cada uno de los elementos se la segunda quedará :

$$(x-y)(x-z)\begin{vmatrix} (-1) & (-1) \\ z & y \end{vmatrix} = (x-y)(x-z)(z-y) =$$

sacando factor común (-1) en el segundo y tercer término del producto queda:

$$= (x-y)\left[(-1)(z-x)\right]\left[(-1)(y-z)\right] = (x-y)(z-x)(y-z)$$

y permutando segundo y tercer término queda:

$$=(x-y)(y-z)(z-x)$$

Verificando así la identidad propuesta.

Ejercicio N°2:

Verificar la siguiente identidad:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z+t \\ 1 & y & z & x+t \\ 1 & z & t & x+y \\ 1 & t & x & y+z \end{vmatrix} = 0$$

Solución del ejercicio N° 2:

Partiendo de la matriz original:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z+t \\ 1 & y & z & x+t \\ 1 & z & t & x+y \\ 1 & t & x & y+z \end{vmatrix}$$

si a la cuarta columna se le suman la segunda y tercera quedará:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & x+y+z+t \\ 1 & y & z & y+z+x+t \\ 1 & z & t & z+t+x+y \\ 1 & t & x & t+x+y+z \end{vmatrix}$$

y ordenando la cuarta columna quedará:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & x+y+z+t \\ 1 & y & z & x+y+z+t \\ 1 & z & t & x+y+z+t \\ 1 & t & x & x+y+z+t \end{vmatrix}$$

en donde se observa que la primera y la cuarta columnas son proporcionales y en consecuencia el valor del determinante es cero.

Otra variante es extraer como factor común los elementos de la cuarta columna. x+y+z+t, entonces queda el siguiente determinante con dos columnas iguales, la primera y la tercera:

$$(x+y+z+t)\begin{vmatrix} 1 & x & y & 1 \\ 1 & y & z & 1 \\ 1 & z & t & 1 \\ 1 & t & x & 1 \end{vmatrix} = (x+y+z+t)\times 0 = 0$$

La propiedad usada dice que que el producto de un determinante por un número es igual al valor del determinante que resulta de multiplicar todos los elementos de una fila o una columna por dicho número. Aquí se usó la inversa que equivale a extraer el factor común en un determinante.

Ejercicio N° 3:

Verificar la siguiente identidad:

$$:\begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-x-z & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix} = (x+y+z)^3$$

Solución del ejercicio N° 3:

Haciendo $C_1 - C_2 \to C_1$ queda: $\begin{vmatrix} -x-y-z & 2x & 2x \\ y+x+z & y-x-z & 2y \\ 0 & 2z & z-x-y \end{vmatrix}$

Haciendo $C_2 - C_3 \to C_2$ queda: $\begin{vmatrix} -x-y-z & 0 & 2x \\ y+x+z & -y-x-z & 2y \\ 0 & z+x+y & z-x-y \end{vmatrix}$

Haciendo $F_2 + F_1 \to F_2$ queda: $\begin{vmatrix} -x-y-z & 0 & 2x \\ 0 & -y-x-z & 2y+2x \\ 0 & z+x+y & z-x-y \end{vmatrix}$

Haciendo $F_3 + F_2 \to F_3$ queda: $\begin{vmatrix} -x-y-z & 0 & 2x \\ 0 & -y-x-z & 2y+2x \\ 0 & 0 & z+x+y \end{vmatrix}$

calculando el valor del determinante: $(-x-y-z)(-y-x-z)(z+x+y)$

ordenando los elementos dentro de los paréntesis y sacando factor común (-1) quedará:

$$(-1)(x+y+z)(-1)(x+y+z)(x+y+z) = (x+y+z)^3$$

Y así queda verificada la identidad propuesta.

Ejercicio N° 4:

Verificar la siguiente identidad:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ x & -1 & 1 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & x \end{vmatrix}$$

Solución del ejercicio N°4:

Primero desarrollamos el determiinante 3x3 por la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ x & -1 & 1 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} = 2 * \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ x & -2 \end{vmatrix} - 0 * \begin{vmatrix} x & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + x * \begin{vmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{vmatrix}$$

$$= 2 * (2 - x) - 0 + (x) * (x^2 - 0) = 4 - 2x + x^3 \quad (\dagger)$$

desarrollo del determinante 2x2:

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & x \end{vmatrix} = -2x - 4 \quad (\lozenge)$$

igualando las expresiones $(\dagger)$ y $(\lozenge)$ queda:

$$4 - 2x + x^3 = -2x - 4$$

igualando a cero y ordenando:

$$x^3 + 8 = 0 \Rightarrow x^3 = -8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-8} \Rightarrow x = -2$$

Verificación:

Se verifica haciendo x=-2:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} + (-2) * \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 * 4 + (-2) * 4 = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2) * (-2) - 4 * 1 = 4 - 4 = 0$$

Se verifica que ambos determinantes valen cero.

Ejercicio N° 5:

Verificar la siguiente identidad:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ verificar que } |A| = |A^t|$$

Solución del ejercicio N°5:

$$\text{sea } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ verificar que } |A| = |A^t|$$

Desarrollando $|A|$ por la primera fila:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

Desarrollando $|A^t|$ por la primera columna:

$$|A^t| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A^t| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

Compar tando se comprueba que los dos desarrollos son iguales, es lo que se quería demostrar