http://www.rubenprofe.com.ar
rubenprofe@yahoo.com.ar

INVERSA DE UNA MATRIZ

La inversa de una matriz suele traer complicaciones porque se trata de un algoritmo que requiere muchas operaciones, y que en ellas es posible cometer un error, ya sea por fatica, desinterés o falta de atención.

El objeto del artículo es desarrolar métodos alternativos para llevar a feliz término la tarea.

1.- Método de la matriz adjunta.

Los pasos propuestos son los siguientes:

1. Cálculo del determinnante de la matriz A
2. Cálculo de la matriz de los determinantes de los menores adjuntos M
3. Cálculo de la matriz de cofactores.
4. Cálculo de la matriz adjunta Adj(A)
5. Cálculo de la inversa.

$1.-\ A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=-2$

$2.-\ A_{11}=4;\ A_{12}=3;\ A_{21}=2;\ A_{22}=1$ Ahora la matriz será: $\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}$

3.- la matriz de los cofactores será: $\begin{pmatrix}4&-3\\-2&1\end{pmatrix}$

4.- La matriz adjunta será la transpuesta de la anterior,

es decir: $\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$

$5.-\ \text{Finalmente: } A^{-1}=\frac{1}{|A|}A=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{-2}&\frac{-2}{-2}\\\frac{-3}{-2}&\frac{1}{-2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Prueba:

$$AxA^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}x\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}x\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$

que cumple con la propiedad $AxA^{-1}=I=A^{-1}xA$

Otro ejemplo desarrollado, sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$1.-|A|=\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=1$

$2.-A_{11}=1;\ A_{12}=3;\ A_{21}=2;\ A_{22}=7$ Ahora la matriz será: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

3.- la matriz de los cofactores será: $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$

4.– La matriz adjunta será la transpuesta de la anterior,

es decir: $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$

5.– Finalmente: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$

Prueba:

$AxA^{-1}=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}x\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}x\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ que cumple

con la propiedad $AxA^{-1}=I=A^{-1}xA$

1.2.- Ejercicios de aplicación con resoluciones paso a paso:

MATRIZ(A)	DET(A)	MAT MENORES	MAT. ADJ(A)	MAT INV(A)
$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{7}{6} & \frac{-5}{6} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	-2	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-2}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$	$\frac{-1}{40}$	$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-3}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -30 & -24 \\ \frac{-80}{3} & -20 \end{pmatrix}$

1.3.- Ejercicios varios:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 6 & -4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}7 & -5\\ 8 & -3\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}2/5 & 1/3\\ 2 & -1\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}3/7 & -4/5\\ 5/8 & 7/9\end{pmatrix};\ E=\begin{pmatrix}0.7 & 0.4\\ 2.5 & 0.5\end{pmatrix}$$

Respuestas:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{11} & \frac{5}{22}\\ \frac{3}{11} & \frac{1}{11}\end{pmatrix};\ B^{-1}=\begin{pmatrix}\left(\frac{-3}{19}\right) & \frac{5}{19}\\ \frac{-8}{19} & \frac{7}{19}\end{pmatrix};\ C^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{15}{16} & \frac{5}{16}\\ \frac{15}{8} & \frac{-3}{8}\end{pmatrix};\ D^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{14}{15} & \frac{24}{25}\\ \frac{-3}{4} & \frac{18}{35}\end{pmatrix};$$

$$E^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-10}{13} & \frac{8}{13}\\ \frac{50}{13} & \frac{-14}{13}\end{pmatrix}$$

2.- Método de Gauss:

Consiste en aparear la matriz A, que es la que se pretende invertir, con la matriz identidad (I) del mismo órden. Luego se aplica el método de Gauss hasta lograr que la matriz A se transforme en la identidad, entonces la matriz I quedó transformada en la inversa de A.

Tomanos como ejemplo la matriz usada en el primer ejemplo del del apartado anterior:

$$\boxed{\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2}\end{array}\right)}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2}\end{pmatrix}$$

Ejemplo tomado del segundo ejemplo del punto anterior:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{-3}{7} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

Como ejercicios de aplicación se pueden tomar los correspondientes a los párrafos 1.2 y 1.3.-

3.- Verificar las siguientes igualdades correspondientes a una matriz y su inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-5}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{47} & \frac{-3}{47} & \frac{5}{47} \\ \frac{1}{47} & \frac{13}{47} & \frac{-6}{47} \\ \frac{11}{47} & \frac{2}{47} & \frac{-19}{47} \end{pmatrix}$$