DERIVADAS DE FUNCIONES COMPUESTAS

La derivación de funciones simples es inmediata porque solo se necesita aplicar la tabla de derivadas y realizar operaciones algebraicas simples.

Cuando se trata de funciones compuestas la operación requiere dos partes, en primer lugar se deriva la función principal o **contenedora** y en segúndo lugar se deriva la función secundaria o **contenida**, finalmente se realiza la multiplicación.

Ejemplo:

Sea: $y=(f\circ g)(x)=f\left[g(x)\right]$,entonces la derivada será

$$y'=f'\left[g(x)\right].g'(x)$$

Como se puede ver en primer lugar se deriva f considerando que es la función **principal o contenedora de g(x**), en esta circunstancia la función g(x) funciona como si fuera la variable x en las derivadas inmediatas, a este resultado se lo multiplica por la derivada de g(x) como cualquier derivada inmediata.

Desarrollo del siguiente ejemplo:

$f(x)=\text{sen}(\ln x)$ $\quad f(x)=\text{sen}[g(x)]$ $\quad$ y $\quad g(x)=\ln x$

derivando queda: $f'(x)=\cos(g(x))$ $\quad$ y $\quad g'(x)=\frac{1}{x}$

finalmente queda: $y'=\cos(\ln x).\frac{1}{x}=\frac{\cos(\ln x)}{x}$

Otra estategia muy útil consiste en hacer el siguiente cambio de variable:

g(x) = lnx = t entonces la función original $f(x)=\text{sen}(\ln x)$ se transforma en $f(t)=\text{sen}(t)$ y su derivada $f'(t)=\cos(t).t'$

Este método es recomendable en la etapa de aprendizaje porque es muy útil en los reemplazos en la integración por sustitución.

Otro ejemplo usando el cambio de vartiable g(x) = t:

sea $f(x)=\ln(\text{sen}\,x)$ haciendo el cambio de variable $t=\text{sen}\,x$,

entonces $t'=\cos x$

la función original $f(x)=\ln(\text{sen}\,x)$ se convierte en $f(t)=\ln(t)$

derivando queda: $f'(t)=\frac{1}{t}\,t'$ y finalmente reemplazando quedará

$$y'=\frac{1}{\text{sen}x}.\cos x=\frac{\cos x}{\text{sen}\,x}$$

TABLA DE EJEMPLOS DE FUNCIONES COMPUESTAS SIMPLES		
Número	función	derivada
1	$y=\left[g(x)\right]^n$	$y'=n\left[g(x)\right]^{n-1}g'(x)$
2	$y=e^{g(x)}$	$y'=e^{g(x)}\ g'(x)$
3	$y=\ln\left[g(x)\right]$	$y'=\dfrac{1}{g(x)}\ g'(x)$
4	$y=\operatorname{sen}\left[g(x)\right]$	$y'=\cos\left[g(x)\right]\ g'(x)$
5	$y=\cos\left[g(x)\right]$	$y'=-\operatorname{sen}\left[g(x)\right]\ g'(x)$
6	$y=\sqrt{g(x)}$	$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{g(x)}}\ g'(x)$
7	$y=\dfrac{1}{g(x)}$	$y'=\dfrac{-1}{\left[g(x)\right]^2}g'(x)$
8	$y=\dfrac{1}{\sqrt{g(x)}}$	$y'=\dfrac{-1}{2\sqrt{\left[g(x)\right]^3}}g'(x)$

Algunos ejemplos resueltos:

1.– $f(x)=e^{xsenx}$ cambio de variable $t=xsenx$, y $t'=senx+xcosx$ ahora es $f(t)=e^t$ y su derivada $f'(t)=e^t\ t'$ haciendo el cambio de variable inverso queda $f'(x)=e^{xsenx}\ (senx+xcosx)$

2.– $f(x)=sen\left(\sqrt{x}\right)$ cambio de variable $t=\sqrt{x}$ $t'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(t)=sen(t)$; y derivando $f'(t)=(cos\,t)t'$

y haciendo el cambio de variable inverso queda:

$$f'(x)=cos\left(\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{cos\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$$

Para el caso de composición de más de dos funciones se procede igual, en caso de que sean tres funciones será:

$$y=f\left\{g\left[h(x)\right]\right\} \text{ entonces } y'=f'\left\{g\left[h(x)\right]\right\}g'\left[h(x)\right]h'(x)$$

De la misma forma se procede en todos los casos.

Ejecicios suplementarios aquí http://www.rubenprofe.com.ar/4matuniv/37matem/372deriv1.pdf