Integración por partes (revisión)

Sea **∫senx dx**, esta integral no se puede hacer por sustitución. pero, es posible aplicar el **método de integración por partes** que se fundamenta en el uso de la siguiente fórmula:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

Desarrollo de un ejemplo introductorio : Calcular $\int x \operatorname{sen}x\, dx$

La parte fundamental consiste en determinar la parte mas conveniente de la función para asignarle el valor de dv y cual es la parte asignada a u, para ello es útil la coastrucción de la siguiente tabla:

u	x	dv	sen x dx
	DERIVADA DE u		*INTEGRAL DE dv*
du	dx	v	-cos x

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$
$$\int x \operatorname{sen}x\, dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x)\, dx$$
$$\int x \operatorname{sen}x\, dx = -x \cos x + \int \cos x\, dx$$

En la segunda igualdad se puede ver que hay una integral inmediata $\int \cos x\, dx$, mucho más fácil que la integral original, entonces:

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen}x + C$$

el resultado final es:

$$\int x \operatorname{sen}x\, dx = - x \cos x + \operatorname{sen}x + C$$

Un camino posible para determinar el sector de la fórmula que será reemplazado por v y cuál es al sector reemplazado por dv se puede usar la tabla que se ve a continuación, su armado es muy sencillo, solo basta con tener en cuenta la palabra ILPET con el significado de cada letra como se puede ver en la siguiente tabla:

u →				← dv
I	**L**	**P**	**E**	**T**
rsa	*logaritmica*	*polinomio*	*exponencial*	*trigonometica*

El resultado de la aplicación de esta regla no es taxativo, es sólo indicativo, pero es muy útil para comenzar a resolver el problema, puede ocurrir que se tengan dos sustituciones posibles o ninguna-

No se debe perder de vista que el objetivo fundamental del método consiste en lograr una integral que sea más fácil que la original, si con el reemplazo aparece una integral mas complicada, no conviene usar la sustitución.

Ejercicio desarrollado Nº 1:

Resolver: $\int xe^x \, dx$

u	x	dv	e^x dx
	DERIVADA DE u		*INTEGRAL DE dv*
du	dx	v	e^x

$$\int u \, dv = u \, v - \int v \, du$$
$$\int x \, e^x \, dx = x \, e^x - \int e^x \, dx$$
$$\int x \, e^x \, dx = x \, e^x - e^x + C$$

Ejercicio desarrollado Nº 2:

Resolver $\int x^4 \ln x \, dx$

u	lnx	dv	x^4 dx
	DERIVADA DE u		*INTEGRAL DE dv*
du	$\frac{1}{x}$	v	$\frac{x^5}{5}$

$$\int u \, dv = u \, v - \int v \, du$$
$$\int (\ln x) x^4 dx = (\ln x)\frac{x^5}{5} - \frac{1}{5}\int x^5 \frac{1}{x} dx$$
$$\int (\ln x) x^4 dx = (\ln x)\frac{x^5}{5} - \frac{1}{5}\int x^4 dx$$
$$(\ln x)\int x^4 dx = (\ln x)\frac{x^5}{5} - \frac{1}{25}x^5 + C$$

Ejercicio desarrollado Nº 3: Integrales cíclicas

Resolver $\int \text{sen}^2 x \, dx$

u	sen x	dv	sen x dx
	DERIVADA DE u		*INTEGRAL DE dv*
du	cos x dx	v	-cos x

$$\int u \, dv = u \, v - \int v \, du$$

$$\int \text{sen}^2 x\ dx = \cos x(-\text{sen}x) - \int(-\cos x)\cos x dx$$

$$\int \text{sen}^2 x\ dx = -\cos x(\text{sen}x) + \int \cos^2 x dx$$

Aquí se hace el reemplazo trigonométrico:

$\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$ entonces $\int \cos^2 x dx = \int(1-\text{sen}^2 x)dx$

ejecutando el reemplazo quedará:

$$\int \text{sen}^2 x\ dx = -\cos x(\text{sen}x) + \int(1-\text{sen}^2 x)dx$$

$$\int \text{sen}^2 x\ dx = -\cos x(\text{sen}x) + \int 1\ dx\ -\ \int \text{sen}^2 x\ dx$$

aparece en el último término lo mismo que en el miembro izquierdo, agrupando a la izquierda:

$$\int \text{sen}^2 x\ dx + \int \text{sen}^2 x\ dx = -\cos x(\text{sen}x) + \int 1\ dx$$

sumando quedará:

$$2\int \text{sen}^2 x\ dx = -\cos x(\text{sen}x) + \int 1\ dx$$

despejando:

$$\int \text{sen}^2 x\ dx = \frac{-\cos x(\text{sen}x) + \int 1\ dx}{2}$$

Integrando:

$$\int \text{sen}^2 x\ dx = \frac{-\cos x(\text{sen}x) + x}{2} + C$$

Ejercicio desarrollado Nº 4: Integrales iteradas

Resolver $\int x^2 \cos x\ dx$

u	x^2	dv	cos x dx
	DERIVADA DE u		*INTEGRAL DE dv*
du	2 x dx	v	-sen x

$\int$ u dv = u v - $\int$ v du

$\int x^2 \cos x\ dx = x^2(-\text{sen}\ x) - \int(-\text{sen}\ x)\ 2x\ dx$

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 (-\operatorname{sen} x) - \int (-\operatorname{sen} x)\ 2x\, dx$$

$$\int x^2 \cos x\, dx = -x\ \operatorname{sen} x + \int 2x (\operatorname{sen} x)\, dx$$

$$\int x^2 \cos x\, dx = -x\ \cos x + 2\int x(\operatorname{sen} x) dx$$

la segunda integral se resuelve también por partes, es la que está resuelta en el ejemplo introductorio y da: -xcosx+ senx, ahora reemplazando queda:

$$\int x^2 \cos x\, dx = -x\ \cos x + 2\ (\text{-xcosx+ senx}) + C$$

$$\int x^2 \cos x\, dx = -x\ \cos x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + C$$

Las llamo integrales de resolución iterada porque cuando se aplica la primera integración aparece en la nueva integral la expresión original, pero un grado menor, entonces se resolverá esta nueva integral, también por partes hasta llegar al exponente 1 que permite resolver la integral.

En el caso de tener en la ecuación a integrar x^3 se debería hacer el procedimiento 2 veces para llegar a la última integral que será inmediata.

Ejercicio desarrollado Nº 5: Integrales iteradas

Resolver $\int x^3 e^X dx$

Primer paso:

u	x^3	dv	$e^X dx$
	DERIVADA DE u		*INTEGRAL DE dv*
du	$3x^2\ dx$	v	e^X

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

$$\int x^3 e^X dx = x^3 e^X - \int e^X 3x^2\ dx$$

$$\int x^3 e^X dx = x^3 e^X - 3\int x^2 e^X dx$$

$$\int x^3 e^X dx = x^3 e^X - 3\int x^2 e^X dx \quad (1)$$

Segundo paso:

u	x^2	dv	$e^X dx$
	DERIVADA DE u		*INTEGRAL DE dv*
du	$2\,x\,dx$	v	e^X

$$\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$$

$$\int x^2 e^X dx = x^2 e^X - \int e^X 2\,x\,dx$$

$$\int x^2 e^X dx = x^2 e^X - 2\int x\, e^X dx \quad (2)$$

La integral $\int x\, e^X\, dx$ fue calculada en el ejercicio desarrollado 1 y su valor es:

$$\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - e^x + C$$

Quitando C para colocar una constante única al final y reemplazando en (2) quedará:

$$\int x^2 e^X dx = x^2 e^X - 2\int x\, e^X dx =$$
$$\int x^2 e^X dx = x^2 e^X - 2(x\, e^x - e^x) =$$
$$\int x^2 e^X dx = x^2 e^X - 2\, x\, e^x + 2\, e^x = \quad (3)$$

Volviendo atrás y recordano el resultasdo parcial (1)

$$\int x^3 e^X dx = x^3 e^X - 3\int x^2 e^X dx \quad (4)$$

Se resmplaza la parte verde de (3) por la parte verde de 4

$$\int x^3 e^X dx = x^3 e^X - 3(x^2 e^X - 2\, x\, e^x + 2\, e^x) + C$$

$$\boxed{\int x^3 e^X dx = x^3 e^X - 3x^2 e^X + 6\, x\, e^x - 6e^x + C}$$

Cuadro resumen del procedimiento

$\int x^3 e^X dx = x^3 e^X - 3\int x^2 e^X dx$			
	$\int x^2 e^X dx = x^2 e^X - 2\int x e^X dx$		
		$\int x\, e^X dx = x\, e^X - \int e^X dx$	
			$\int e^X dx = e^X$
		$\int x\, e^X dx = x\, e^X - e^X$	
	$\int x^2 e^X dx = x^2 e^X - 2(x\, e^X - e^X) = x^2 e^X - 2x\, e^X + 2\, e^X$		
$\int x^3 e^X dx = x^3 e^X - 3(x^2 e^X - 2\, x\, e^X + 2\, e^X) + C =$ **$x^3 e^X - 3\, x^2 e^X + 6x\, e^X - 6e^X + C$**			

Ejercicios propuestos:

1)	$\int x\, e^x\, dx$	19)	$\int e^x \cos x\, dx$
2)	$\int \ln x\, dx$	20)	$\int \ln(x+1)\, dx$
3)	$\int x\, \mathrm{sen}x\, dx$	21)	$\int \ln x\, dx/\sqrt{(x)}$
4)	$\int x \cos x\, dx$	22)	$\int \ln(2-x)\, dx$
5)	$\int x \ln x\, dx$	23)	$\int x^2 \cos x\, dx$
6)	$\int x\, e^{2x}\, dx$	24)	$\int \sqrt[3]{(x)} \ln x\, dx$
7)	$\int x e^{-x}\, dx$	25)	$\int \cos(\ln x)\, dx$
8)	$\int \sqrt{(x)} \ln x\, dx$	26)	$\int x^2 \mathrm{sen}x\, dx$
9)	$\int \ln x^2\, dx$	27)	$\int e^x\, \mathrm{sen}x\, dx$
10)	$\int x\, e^{(½)x} dx$	28)	$\int \mathrm{sen}^2 x\, dx$
11)	$\int (x+3)\, e^x\, dx$	29)	$\int \mathrm{sen}(\ln x)\, dx$
12)	$\int x^2 \ln x\, dx$	30)	$\int x^2 e^x\, dx$
13)	$\int (x-7)\mathrm{sen}x\, dx$	31)	$\int x^3 \mathrm{sen}x\, dx$
14)	$\int x e^{x+7}\, dx$	32)	$\int \ln^2 x\, dx$
15)	$\int x^{-3} \ln x\, dx$	33)	$\int \sqrt{(x)} \ln^2 x\, dx$
16)	$\int x^4 \ln x\, dx$	34)	$\int \cos^2 x\, dx$
17)	$\int x \ln(x+1)\, dx$	35)	$\int x^3 e^x\, dx$
18)	$\int \ln(1-x^2)\, dx$	36)	$\int \ln(x^2-x)\, dx$