INTREGRACION POR SUSTITUCION

Cuando se trata de funciones compuestas, se aplica un método que se llama integración por sustitución, este método será entendido sin dificultad en la medida en que el alumno **tenga mucha práctica** en la **derivación** de **funciones compuestas**. En principio la tabla de derivadas de las funciones compuestas es la ayuda necesaria, para este caso se entra por la columna de las derivadas y se sale por la columna de las funciones.

ejemplos de aplicación

1.- uso de la fila 1 de la tabla de *de derivadas de funciones compuestas simples*

Calcular $\int (x^2+4x-3)^3 (2x+4)dx$ se observa que esta integral tiene forma similar a $y'=n\left[g(x)\right]^{n-1} g'(x)$ el parecido permite ensayar con la sustitución

Sustitución: $t = x^2+4x-3$, cuya diferencial con respecto a x es dt=t′dx

o sea dt = $(2x+4)dx$ y despejando dx para reemplazar queda:

$dx=\frac{dt}{(2x+4)}$ volviendo a la integral original:

$\int (x^2+4x-3)^3 (2x+4)dx$ y reemplazando, t y dt queda:

$$\int \quad (t)^3 \quad (2x+4) \quad \frac{dt}{(2x+4)} =$$

$= \int \quad t^3 \quad dt$ que es una integral inmediata:

operando: $\int t^3 dt = \frac{t^4}{4}+C$ y aplicando a t la sustitución inversa

quedará $F(x)=\frac{(x^2+4x-3)^4}{4}+C$ que es la primitiva buscada.

Para verificar la integración se deriva primitiva hallada $F(x)$, si está todo bien el resultado será la función subintegral f(x).

Tabla resumen del procedimiento:

f(x)	**g(x)=t**	**dt**	**dx**	**f(t)**
$(x^2+4x-3)^3 (2x+4)$	x^2+4x-3	$(2x+4)dx$	$\frac{dt}{(2x+4)}$	$(t)^3\,dt$

$$F(t)=\int (t)^3\,dt=\frac{t^4}{4}+C \quad \Rightarrow \quad F(x)=\frac{(x^2+4x-3)^4}{4}+C$$

2.- uso de la fila 2 de la tabla de *de derivadas de funciones compuestas simples:*

Calcular $\int e^{\operatorname{sen}x}\cos x dx$ tiene forma similar a

$y' = e^{g(x)}\ g'(x)$

Sustitución: $t = \operatorname{sen} x$, cuya diferencial con respecto a x es dt=t′dx

o sea dt = cosx dx y despejando dx para reemplazar queda:

$dx = \dfrac{dt}{\cos x}$ volviendo a la integral original:

$\int e^t\ dx$ y reemplazando, t y dt queda:

$$\int e^t \quad \cos x \quad \frac{dt}{\cos x} =$$

E

$$= \int e^t \quad dt$$ que es una integral inmediata:

operando: $\int e^t dt = e^t + C$ y aplicando a t la sustitución inversa

quedará $F(x) = e^{\operatorname{sen}x} + C$ que es la primitiva buscada.

Para verificar la integración se deriva primitiva hallada $F(x)$, si está todo bien el resultado será la función subintegral f(x).

Tabla resumen del procedimiento:

f(x)	g(x)=t	dt	dx	f(t)
$e^{\operatorname{sen}x}\cos x$	senx	cosx dx	$\dfrac{dt}{\cos t}$	e^t
$F(t) = \int e^t dt = e^t + C$		$\Rightarrow$	$F(x) = e^{\operatorname{sen}x} + C$	

En adelante se dan ejemplos de las restantes filas de la tabla indicando solamente la tabla resumen de proedimiento.

Fila 3: $\int \dfrac{1}{x^2+5} 2x\ dx$ integral parecida a $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}\ g'(x)$

Tabla resumen del procedimiento:

f(x)	g(x)=t	dt	dx	f(t)
$\dfrac{1}{x^2+5}2x$	x^2+5	2x dx	$\dfrac{dt}{2x}$	$\dfrac{1}{t}$
$F(t) = \int \frac{1}{t} dt = \ln t + C \Longrightarrow F(x) = \ln(x^2+5) + C$				

Fila 4:

$$\int \cos(\ln x)\frac{1}{x}dx \text{ parecida a } f(x)=\cos[g(x)]\ g'(x) \text{ luego:}$$

f(x)	g(x)=t	dt	dx	f(t)
$\cos(\ln x)\frac{1}{x}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}dx$	x dt	$\cos t$

$$F(t)=\int \cos t\ dt = \text{sent} + C \Longrightarrow F(x)=\text{sen}(\ln x)+C$$

Fila 5.-

$$\int \text{sen}\left(\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \text{ parecida a } f(x)=\text{sen}[g(x)]\ g'(x) \text{ luego:}$$

f(x)	g(x)=t	dt	dx	f(t)
$\text{sen}\left(\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$	$2\sqrt{x}dt$	$\text{sen}(t)$

$$F(t)=\int \text{sen}(t)dt = -\cos t + C \quad \Rightarrow F(t)=-\cos\left(\sqrt{x}\right)+C$$

Fila 6.-

$$\int \frac{1}{2\sqrt{\text{sen}x}}\cos x dx \text{ parecida a } f(x)=\frac{1}{2\sqrt{g(x)}}\ g'(x) \text{ luego:}$$

f(x)	g(x)=t	dt	dx	f(t)
$\frac{1}{2\sqrt{\text{sen}x}}\cos x$	senx	$\cos x\ dx$	$\frac{dt}{\cos x}$	$\frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$$F(t)=\int \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \sqrt{t}+C \Rightarrow F(x)=\sqrt{\text{sen}x}+C$$

Fila 7.-

$$\int \frac{1}{(2x+8)^2}2\ dx \text{ parecida a } f(x)=\frac{-1}{[g(x)]^2}g'(x) \text{ luego:}$$

f(x)	g(x)=t	dt	dx	f(t)
$\frac{1}{(2x+8)^2}2$	$(2x+8)$	$\frac{dx}{2}$	$\frac{dt}{2}$	$\frac{1}{t^2}$

$$F(t)=\int \frac{1}{t^2}dt = \frac{-1}{t}+C \quad \Rightarrow \quad F(x)=\frac{-1}{(2x+8)}+C$$

Fila 8.-

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(x^2+3\right)^3}} 2x\ dx \quad \text{similitud con} \quad y' = \frac{-1}{2\sqrt{\left[g(x)\right]^3}} g'(x) \ \text{luego:}$$

f(x)	g(x)=t	dt	dx	f(t)
$\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+3\right)^3}}2x$	x^2+3	2xdx	$dx=\frac{dt}{2x}$	$\frac{1}{\sqrt{t^3}}$

$$F(t)=\int \frac{1}{\sqrt{t^3}}dt=\int t^{-\frac{3}{2}}dt=-\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}+C=\frac{-2}{\sqrt{t}}+C \quad \Rightarrow F(x)=\frac{-2}{\sqrt{\left(x^2+3\right)}}+C$$

RESUMEN

Los siguientes tips permiten tener una guía para encarar la resolución de una integral por sustitución, repito que se trata de una aproximación, es posible que en algunos casos no se tenga éxito en reemplazo, entonces se debe ensayar con otra sustitución, y si tampoco se logra posiblemente no ten-ga solución por el método de sustitución.

1.- Si el integrando es una potencia o raíz, t será la base el subintegral.

2.- Si el integrando es una función exponencial, t será el exponente.
3.- Si el integrando es un cociente de polinomios, t será el divisor.
4.- Si el integrando es seno o coseno, t será el argumento.
5.- Si el integrando es un logaritmo natural, t será el argumento.

OTRO EJEMPLO DESARROLLADO PASO A PASO

$$F(x)=\int\left[e^{\operatorname{sen}\left(x^2+2x\right)}\cos\left(x^2+2x\right)\left(2x+2\right)\right]dx$$

$$t=\operatorname{sen}\left(x^2+2x\right)$$

$$dt=\cos\left(x^2+2x\right)\left(2x+2\right)\ dx$$

$$dx=\frac{dt}{\cos\left(x^2+2x\right)\left(2x+2\right)}$$

$$F(x)=\int e^t dt = e^t + C = e^{\operatorname{sen}\left(x^2+2x\right)}+C$$

$$F(x)=e^{\operatorname{sen}\left(x^2+2x\right)}+C$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) $\int (x^2+x)(2x+1)dx$	16) $\int -3\cos^2 x \ \text{sen}x \ dx$
2) $\int 2x(x^2+1) \ dx$	17) $\int \frac{\text{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$
3) $\int \frac{2xdx}{x^2+1}$	18) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}$
4) $\int \frac{x^2+x+1}{\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+2}dx$	19) $\int \frac{\text{sen}x}{1+\cos x}dx$
5) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$	20) $\int e^{1+x+\cos x}(1+\cos x)dx$
6) $\int \sqrt{x^3+x}(3x+1) \ dx$	21) $\int \frac{\cos(6x)}{\text{sen}^2(6x)}dx$
7) $\int \sqrt{\text{sen}x} \ \cos x \ dx$	22) $\int x\cos(x^2)dx$
8) $\int \frac{\cos x}{\text{sen}x}dx$	23) $\int x^3\sqrt{3x^4+1}dex$
9) $\int \frac{l2x+3}{x^2+3x-1}dx$	24) $\int \frac{\cos(\sqrt{x}-4)}{2\sqrt{x}}dx$
10) $\int \frac{\text{sen}x}{\cos x}dx$	25) $\int \frac{\cos x}{5+\text{sen}x}dx$
11) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$	26) $\int 2x\cos(3x^2+2)dx$
12) $\int e^{\text{sen}x}\cos x \ dx$	27) $\int x\cos(x^2)dx$
13) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$	28) $\int \frac{x}{x^2+1}dx$
14) $\int e^{x^2+x}(2x+1)$	29) $\int \frac{e^x}{e^x-2}dx$
15) $\int \frac{\text{sen}(\ln x)}{x}dx$	30) $\int xe^{-x^2}dx$