

VERIFICACIÓN DE LA SIGUIENTE IDENTIDAD:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = 2 \operatorname{cosec} \alpha$$

DESARROLLO:

Sumar el primer término tomando el denominador común:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + (1 + \cos \alpha)^2}{(1 + \cos \alpha) \operatorname{sen} \alpha}$$

Desarrollando el cuadrado del paréntesis queda:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + (1 + 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha)}{(1 + \cos \alpha) \operatorname{sen} \alpha}$$

Quitando el paréntesis:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha + 1 + 2 \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha) \operatorname{sen} \alpha}$$

Ordenando y agrupando:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{(\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 1 + 2 \cos \alpha}{(1 + \cos \alpha) \operatorname{sen} \alpha}$$

Aplicando la identidad pitagórica:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{(1) + 1 + 2 \cos \alpha}{(1 + \cos \alpha) \operatorname{sen} \alpha}$$

Sumando los números:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{2 + 2 \cos \alpha}{(1 + \cos \alpha) \operatorname{sen} \alpha}$$

Extrayendo el factor común 2:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{2(1 + \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha) \operatorname{sen} \alpha}$$

Simplificando paréntesis:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{2}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Reemplazando en el segundo miembro la inversa del $\operatorname{sen} \alpha$ por $\operatorname{cosec} \alpha$:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = 2 \operatorname{cosec} \alpha$$

Se logró la verificación de la identidad propuesta.-

NOTA: Se partió del primer término de la identidad, y realizando operaciones algebraicas válidas se llegó a la expresión del segundo término.

En las pruebas escritas los profesores suelen pedir que en cada uno de los pasos se describa la operación realizada y se justifique.

©Rubén Víctor Innocentini-06/08-2010